

Successioni e progressioni aritmetiche e geometriche

Fila A Cognome Nome
Tempo: Classe Data

Problema

Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiese al re cui fece dono del gioco una ricompensa apparentemente modesta: per la prima casella un chicco di grano, per la seconda casella il doppio, cioè due chicchi, per la terza casella il doppio di quanto chiesto nella seconda casella e così via raddoppiando sempre per ogni casella quanto chiesto per la casella precedente fino alla casella 64.

- Qual è il numero totale dei chicchi di grano chiesti?
- A quale casella corrispondono 262 143 chicchi di grano?
- Seguendo un procedimento simile a quello che si è seguito per determinare la somma di n termini consecutivi di una progressione aritmetica, scrivi la formula che dà il prodotto di n termini consecutivi di una progressione geometrica a termini positivi. Determina, quindi, il prodotto dei chicchi di grano corrispondenti alle prime 8 caselle.
- In una progressione geometrica, se la ragione è positiva i termini della successione hanno tutti lo stesso segno? Fornisci una spiegazione esauriente.

Quesiti

- Determina il termine generale della successione $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$. Traccia il grafico della successione. Una stessa successione può essere definita analiticamente in più modi diversi? In caso affermativo, fornisci una seconda espressione analitica della successione. Definisci ricorsivamente la successione data.
- Di una progressione geometrica si sa che $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_6 = -25\sqrt{10}$. Determina l'espressione analitica della progressione e quindi i primi sei termini.
- Una particolare successione è quella di Bernoulli. Una definizione ricorsiva di tale successione è la seguente: $B_0 = 1$; $B_1 = -\frac{1}{2}$; $B_n = (B + 1)^n$, con $n > 1$ e con la convenzione che, dopo aver sviluppato la potenze del binomio in questione, gli esponenti di B vengano considerati pedici.
Per esempio, si ha: $B_3 = (B + 1)^3 = B^3 + 3B^2 + 3B^1 + 1 = B_3 + 3B_2 + 3B_1 + 1$, da cui, semplificando i termini B_3 , si ricava il valore di B_2 : $B_2 = -\frac{1}{3} - B_1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Nota che nello sviluppo del cubo del binomio è stato considerato l'esponente di B alla prima potenza, che tradizionalmente non si scrive, che diventa poi il pedice 1 e che la formula $B_n = (B + 1)^n$ per un dato valore di n dà il termine B_{n-1} . Determina il valore di B_5 .
- La sequenza 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, ... è detta successione di Perrin. Individua una definizione ricorsiva della successione. Indica i primi tre termini rispettivamente con $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ e il generico termine con $P(n)$. Si ha quindi $P(0) = 3$, $P(1) = 0$, $P(2) = 2$.
- Enuncia e svolgi un problema *originale* e tratto «dalla vita reale» che abbia come modello una progressione aritmetica.

Successioni e progressioni aritmetiche e geometriche

Fila B Cognome Nome
Tempo: Classe Data

■ Problema

Una giovane donna molto previdente, appena saputo di essere incinta, pensa assieme al marito di mettere da parte, da subito, dei soldi per gli studi del nascituro. La coppia, inizialmente con poche possibilità economiche ma auspicando tempi migliori, decide di destinare a tale scopo un centesimo il primo mese, due centesimi il secondo mese, quattro centesimi il terzo mese e così via raddoppiando ogni mese la somma accantonata il mese precedente.

- Quale somma la coppia ha risparmiato in 5 anni?
- Dopo quanto tempo la coppia ha raccolto 65 535 centesimi?
- Considerando due numeri a e b positivi, la media aritmetica di questi numeri è maggiore, uguale o minore della loro media geometrica? Fornisci una spiegazione esauriente.
- Si possono sempre inserire m medi geometrici tra due numeri, dati a e b ? Fornisci una spiegazione esauriente.

■ Quesiti

- Determina il termine generale della successione $\frac{1}{9}, \frac{2}{25}, \frac{3}{49}, \frac{4}{81}, \frac{5}{121}, \dots$. Traccia il grafico della successione. Una stessa successione può essere definita analiticamente in più modi diversi? In caso affermativo, fornisci una seconda espressione analitica della successione. Definisci ricorsivamente la successione data.
- Determina il termine generale della successione $2, 5, 2, -19, -238, -3067, \dots$
- Un ragazzino riceve dei soldi per il suo compleanno e decide di spenderli tutti acquistando 24 libri di vario genere. Ogni anno è sua intenzione incrementare la propria biblioteca destinando i soldi avuti in regalo all'acquisto sempre di 24 libri. Quanti anni gli occorrono per avere una biblioteca ricca di 768 libri?
- La sequenza $1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \dots$ è detta successione di Padovan. Individua una definizione ricorsiva della successione. Indica i primi tre termini rispettivamente con $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ e il generico termine con $P(n)$. Si ha quindi $P(0) = 1$, $P(1) = 1$, $P(2) = 1$.
- Enuncia e svolgi un problema *originale* e tratto «dalla vita reale» che abbia come modello una progressione geometrica.